SESSION DE 1981

MATHÉMATIQUES

(Options T et TA)

Épreuve n° 1 (exercices)

DURÉE : 4 heures

Les cinq exercices proposés sont indépendants.

Aucun document n'est autorisé.

PREMIER EXERCICE

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$.

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E.

On définit une forme quadratique Φ sur E par :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \longmapsto \Phi(\vec{V}) = (x+y+z)^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1° Soit M la matrice de Φ dans la base B.

Écrire M et calculer son déterminant.

Étudier, suivant les valeurs de λ, le rang de Φ, c'est-à-dire le rang de M.

Pour toute la suite de l'exercice, on prend $\lambda = -1$.

Tournez la page S. V. P.

2° Dans l'espace affine euclidien associé à E, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, soit la surface S d'équation :

$$2(xy + yz + zx) = 1$$

Montrer que S est une surface de révolution et déterminer son axe de révolution.

3° Effectuer une décomposition en carrés de Φ suivant la méthode de GAUSS. On pourra considérer le produit $(x+z)(y+z)$.

DEUXIÈME EXERCICE

E est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct. On définit sur E un champ vectoriel $\vec{V}$: à tout point M de E tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ on fait correspondre le vecteur

$$\vec{V}(M) = x^{n+1}\vec{i} + (y - 3yx^n)\vec{j} - z\vec{k}$$

n désigne un entier positif.

1° Déterminer n de telle sorte que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{W}$. La valeur de n ainsi trouvée est conservée dans cette première question.

Déterminer un potentiel vecteur particulier de $\vec{V}$; on prendra sa coordonnée sur $\vec{k}$ nulle.

Comment, ayant un potentiel vecteur particulier de $\vec{V}$, obtient-on tous ses autres potentiels vecteurs?

Soit C la circulation d'un potentiel vecteur $\vec{W}$ de $\vec{V}$ le long d'un cercle d'axe $(O, \vec{k})$ dont on se donnera les éléments. Remplacer cette circulation par un flux et la calculer.

2° n étant un entier positif quelconque, trouver une fonction A de la variable x telle que le champ de vecteurs défini sur E par :

$$\vec{H} = \vec{V} - \overrightarrow{\text{grad}}\, A \quad \text{dérive d'un potentiel vecteur.}$$

Soit D le pavé de E défini par les inégalités :

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2 ; \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2 ; \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2$$

Soit Σ la surface frontière de D. Pour chacune des six faces planes rectangulaires constituant Σ, le vecteur unitaire de la normale orientée est dirigé vers l'extérieur de D.

Calculer le flux φ de $\vec{V}$ à travers Σ.

ENSAM 81 1-87

TROISIÈME EXERCICE

On donne l'équation différentielle :

(E) $$y'' + 2y' + y = f$$

où y est la fonction inconnue.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0 \; ; \; f(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{si} \quad x > 0$$

1° Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

2° Soit $m \in \mathbb{R}$. Démontrer que (E) a, sur $\mathbb{R}$, une solution y_m et une seule telle que $y_m(0) = 0$ et $y'_m(0) = m$.

On déterminera effectivement y_m.

3° Montrer que y_m admet un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $x = 0$, suivant les puissances de x. Écrire ce développement.

Existe-t-il un développement limité de y_m (toujours au voisinage de $x = 0$ et suivant les puissances de x) à un ordre supérieur à 2?

QUATRIÈME EXERCICE

Soit f l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$$

1° Étudier le signe de la dérivée seconde de $ln\, f(x)$ (ln désigne le logarithme népérien). En déduire que f est décroissante.

Étudier les limites de $f(x)$ quand $x \longrightarrow 0$ et quand $x \longrightarrow +\infty$.

2° Soit la série de terme général $U_n = [f(n)]^n \quad (n \geqslant 1)$

Étudier la convergence de cette série.

Tournez la page S. V. P.

3° On pose :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k.$$

En remarquant que $f(k) \leqslant f(1) \quad \forall k \geqslant n+1$

déterminer un majorant σ_n de R_n.

Quel est le plus petit entier n_0 tel que $\sigma_{n_0} < 10^{-6}$?

CINQUIÈME EXERCICE

1° Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = |\sin x|$.

Déterminer le développement en série de Fourier de h.

Montrer que la série trouvée est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2° On donne deux réels α et β ($\alpha < \beta$). Soit F une application de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$, continue et à dérivée première continue.

On pose $m = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |F(x)| \; ; \quad m' = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |F'(x)|$

μ étant un réel strictement positif, soit

$$I(\mu) = \int_\alpha^\beta F(x) \cos \mu x \, dx.$$

Trouver, pour $|I(\mu)|$, un majorant de la forme :

$$|I(\mu)| \leqslant \frac{k}{\mu}$$

où k est un réel qui s'exprime à l'aide de m, m', α et β.

3° Soit $J(\lambda) = \int_\alpha^\beta F(x) |\sin \lambda x| \, dx$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Étudier la limite de $J(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow +\infty$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail